Análisis de Estrellas y Polígonos

Analysis of Stars and Polygons

Hernán Darío Cortés Silva *

RESUMEN

Se presenta en este artículo la descripción de un proceso de análisis, ejecución y control valorativo que se siguió para encontrar respuestas a un desafío de orden geométrico que derivó en el planteamiento de un problema y la solución que finalmente se construyó. Se pretende destacar el valor y la importancia que tiene el asumir una actitud investigativa ante situaciones que son intelectualmente atractivas y desafiantes, aunque los resultados no tengan una utilidad inmediata e incluso aunque no sean plenamente exitosos.

ABSTRACT

In this article is described an analysis, execution and assessment control process that was followed to find answers to a geometrical challenge that became into a problem and the solution to that. There is the purpose to emphasize the value and importance of the investigative attitude in front of situations that are attractive in intellectual form and challenger, although the results have not an immediate utility, indeed they cannot be totally successful.

Palabras clave: *Polígono inscrito y circunscrito, circunferencia, polígono estrellado, paso, análisis, ejecución, control valorativo.*

Key words: *Inscribed and circumscribed polygon, circumference, star shaped polygon, step, analysis, execution, assessment control.*

Fecha de recepción: 20 de noviembre 2006.

Fecha de aprobación: 6 de diciembre 2006.

* Ingeniero Mecánico, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá 1987. Especialista en Pedagogía, Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Bogotá, 1998. Docente del Departamento de Ciencias Básicas, Instituto Técnico Central, Bogotá. **dariocortes61@hotmail.com**

1. Introducción

El problema que se dará a conocer a continuación se caracteriza por los siguientes aspectos:

- Surgió espontáneamente como una inquietud cognitiva, mientras se intentaba solucionar un caso de geometría distinto.
- Aunque no tenía una aplicación práctica conocida, planteaba un reto al intelecto.
- Exigió la aplicación de procesos mentales de análisis, ejecución y control valorativo, como los presentados por Labarrere[1]

Antes de conocer el problema se dejará planteado el referente conceptual a través del cual se analiza el proceso seguido en la solución de este problema, apoyado en la teoría planteada por Labarrere, quien sugiere que un proceso de este tipo resulta ser más exitoso y fructificante desde el punto de vista del aprendizaje si se asume bajo un esquema estructurado compuesto de tres fases interdependientes: análisis, ejecución y control valorativo. El análisis "está dirigido a obtener la información útil para la solución, también es él quien permite destacar, "filtrar" o dejar a un lado aquella información contenida en el problema, o en la situación en que éste se plantea, que no se revela —para el sujeto— como necesaria para el desarrollo de la solución.", y conduce a establecer las relaciones, claves y nexos para llegar a una solución[2]. Por su parte, «la función ejecutiva comprende la puesta en práctica de acciones dirigidas a la transformación efectiva del problema», y se manifiesta a través de la «operación con símbolos, esquemas, fórmulas u otros elementos»[3]. Por último, la función de control valorativo busca regular la actividad cognoscitiva del sujeto, y se expresa en dos formas: manteniendo la actividad del sujeto dentro del curso previsto y valorando el grado de pertenencia y corrección de la actividad desarrollada.

A lo largo del artículo se identificarán estas fases dentro de la solución del problema con las palabras *análisis, ejecución y control valorativo*, mostradas entre paréntesis; también se podrán distinguir los *resultados* que se obtuvieron al aplicar el proceso descrito.

2. El Problema y Su Solución

El problema que se planteó inicialmente, pero que luego dio lugar a una variante, fue el siguiente:

Dadas dos circunferencias concéntricas de radios **r** y **R**, se puede trazar una recta que sea tangente a la circunferencia interior y que se constituya a la vez como una cuerda de la circunferencia exterior, cortando a esta última en los puntos **A** y **B**. Trazando una nueva cuerda por el punto **B** que sea también tangente a la circunferencia interior, se determina un nuevo punto **C** cobre la circunferencia exterior. Si se repite este paso sucesivamente, ¿se podrá llegar a determinar en algún momento un punto en la circunferencia exterior que coincida con el punto inicial **A**? Es decir, ¿se

1. Labarrere Sarduy, Alberto Félix , El análisis, la ejecución y el control valorativo durante la solución de problemas. 1994, pp.131-171.
2. Ibid. p. 135
3. Ibid. p. 136

podrá cerrar la figura? ¿Cuántas cuerdas será necesario trazar para lograr esto?

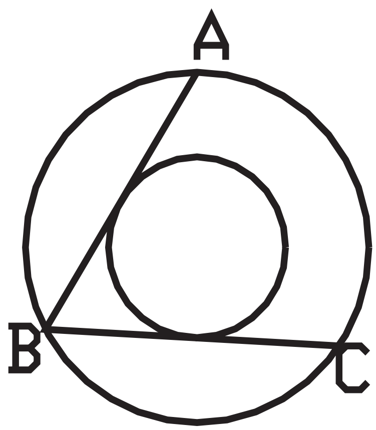

Figura 1. El problema inicial

El problema planteado de esta forma surgió mientras se revisaba en un libro algunos conceptos geométricos para la preparación de un programa de Geometría Descriptiva. Dentro de la conceptualización de algunas figuras geométricas planas en el libro se referían al polígono inscrito en una circunferencia y al polígono circunscrito a una circunferencia, los cuales se pueden definir de la siguiente forma:

Un polígono es una figura plana cerrada, limitada por tres o más rectas que se unen en puntos llamados vértices. Ejemplos de este concepto son el triángulo, el cuadrado, el rectángulo y el rombo. El concepto de polígono inscrito en una circunferencia establece que todos los vértices del mismo deben estar ubicados sobre la misma. Por su parte, el polígono circunscrito a una circunferencia es aquel en que todos los lados del mismo son tangentes a la circunferencia.[4]

4. Viedma C., Juan A. Lecciones de geometría intuitiva.

5. Ibid. pp. 202-206

Adicionalmente, Viedma[5] hace las siguientes consideraciones geométricas:

- Todo triángulo puede ser inscrito o circunscrito a una circunferencia.
- Todo cuadrado puede ser inscrito o circunscrito a una circunferencia.
- Todo rectángulo puede ser inscrito en una circunferencia pero no todo rectángulo circunscribe a una de ellas.
- Todo rombo puede circunscribirse a una circunferencia pero no todo rombo puede ser inscrito en una.

Las anteriores afirmaciones se pueden graficar de la siguiente manera (ver figura 2)

Los casos anteriores suscitaron preguntas como las siguientes: ¿Por qué algunos polígonos pueden ser siempre inscritos en circunferencias pero no circunscritos, o viceversa? ¿Qué condiciones geométricas propias de un polígono se deben cumplir para que este sea inscrito y cuáles para ser circunscrito? ¿Las circunferencias de los polígonos que pueden ser inscritos y circunscritos simultáneamente, son siempre concéntricas? (*análisis*).

Algunas de estas preguntas no tuvieron respuesta inmediata, situación que generaba preguntas adicionales relacionadas con la anterior, o redacciones distintas de las preguntas iniciales (*análisis*). Otras en

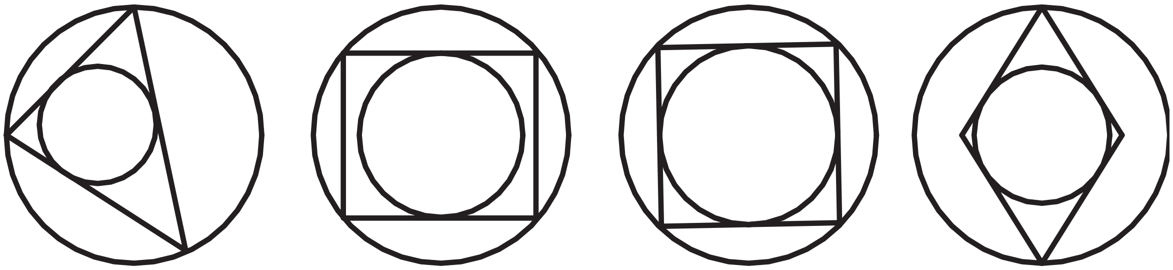

Figura 2. Polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia.

cambio llevaban a efectuar construcciones geométricas (*ejecución*) y análisis correspondientes para encontrar respuestas, las cuales a su vez estimulaban nuevos interrogantes.

Con este proceso de autointerrogación, análisis y experimentación gráfica se llegó a concluir (*resultados*), que cualquier polígono puede ser siempre inscrito y simultáneamente circunscrito en circunferencias concéntricas, siempre y cuando se trate de un polígono regular[6]. Este polígono tiene dos condiciones adicionales sobre el polígono general: que todos sus ángulos y todos sus lados son iguales. En la figura 3 se ejemplifica esta conclusión con un pentágono regular y con un hexágono regular, adicionales al cuadrado mostrado en la figura 2.

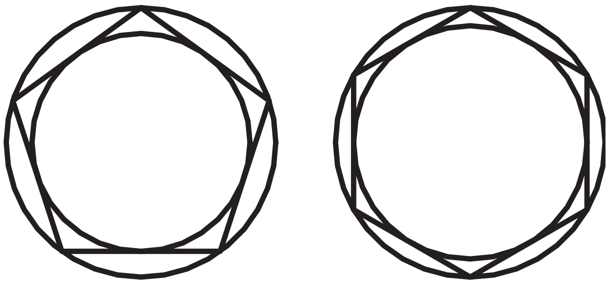

Figura 3. Polígonos regulares.

La característica fundamental que mantienen estos polígonos es que sus lados son tangentes a la circunferencia interior y a la vez cuerdas de la circunferencia exterior. Otro aspecto interesante es que manteniendo constante el radio de la circunferencia exterior, la circunferencia interior tiene un radio mayor a medida que aumenta el número de lados del polígono. Esto se puede observar parcialmente comparando el hexágono con el pentágono.

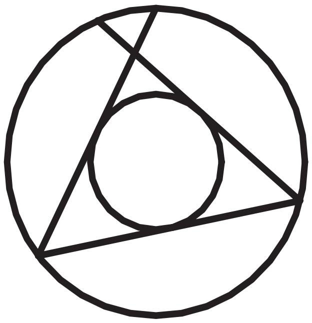

Figura 4. Figura que no cierra.

La última conclusión llevó a plantear una hipótesis (*análisis*): si se mantiene constante el radio de la circunferencia exterior y se varía el radio de la circunferencia interior, se puede variar a voluntad el número de lados del polígono regular inscrito y circunscrito en ellas. Se efectuó una prueba (*ejecución*), dando a la circunferencia interior un radio arbitrario y se notó que no cerraba, es decir, que no se obtenía un polígono, tal

6. Ibid.pp. 203-205

y como se observa en la figura 4. Sin embargo, también se notó que en algunos casos en que el polígono no cerraba, si se continuaba trazando las cuerdas, se obtenía una estrella que sí cerraba, como la que se muestra en la figura 5. (*control valorativo*).

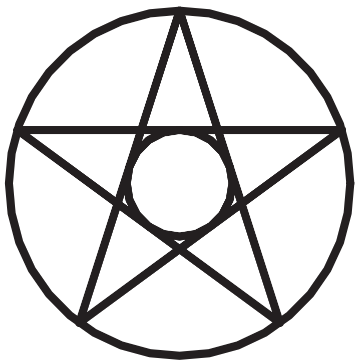

Figura 5. Estrella de cinco puntas.

Se dibujaron otros casos, manteniendo constante el radio de la circunferencia exterior y variando el radio de la interior para observar lo que sucedía (*ejecución*). Algunos permitieron cerrar un polígono o una estrella y en otros aparentemente se seguía trazando cuerdas sin llegar finalmente a un cierre (Ver figura 6). Así surgió el problema ya planteado y que se describirá a continuación en su parte resolutoria.

Como en algunos casos se seguía trazando cuerdas sin fin aparente, hasta que el dibujo se complicaba, se analizaron las características que existían en los casos en que se lograba cerrar un polígono o una estrella y se concluyó que en ellos se destaca el hecho de que los puntos determinados sobre la circunferencia exterior se encuentran regularmente espaciados en un ángulo de 2π radianes (*resultados*), como se observa en las figuras 3, 5 y 7.

Entonces se dibujaron nuevos casos (*ejecución*), esta vez manteniendo constante la circunferencia exterior y definiendo sobre ella puntos igualmente espaciados, los cuales se constituían en los vértices de polígonos y estrellas regulares, que indefectiblemente permitían inscribir luego una circunferencia interior concéntrica con la anterior (ver figura 9).

De estos últimos casos se pudieron deducir las siguientes relaciones geométricas (*resultados*):

1.Cuando se tienen cinco o más puntos en una circunferencia, se pueden unir consecutivamente cada dos, tres, cuatro o más puntos, obteniéndose uno o varios polígonos y una o varias estrellas para un mismo número de puntos sobre la circunferencia.

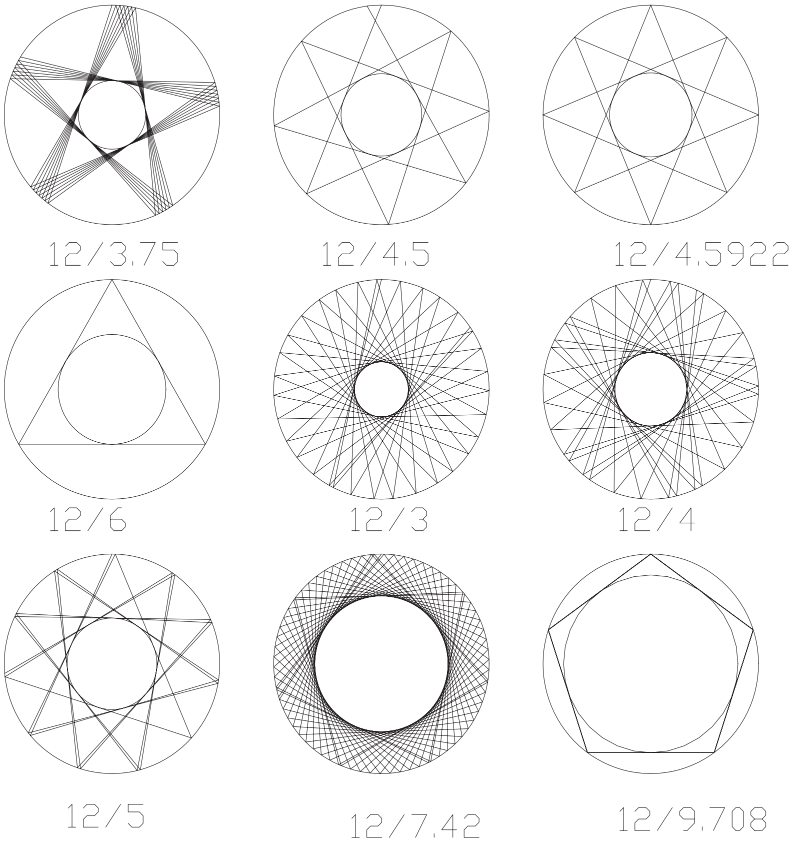

Figura 6. Polígonos, estrellas y figuras no cerradas, con distintas razones R/r

2.La estrella tiene un paso **P** definido como el número de espacios **e** que existen entre dos vértices unidos por una cuerda (ver figura 8).

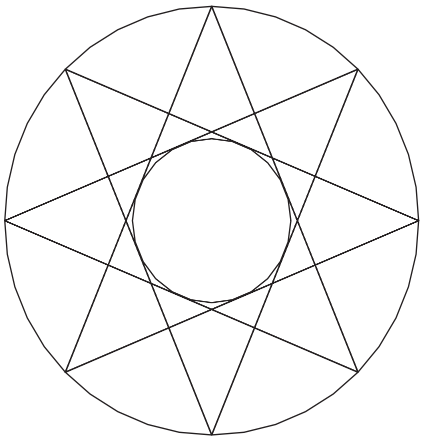

Figura 8. Estrella de 13 vértices y paso 3.

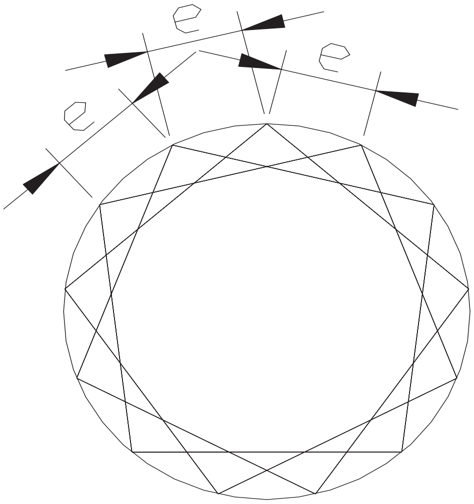

Figura 7. Estrella de ocho puntas

3.El radio de la circunferencia inscrita en una estrella aumenta, si se incrementa el número de vértices y se mantienen inmodificables los demás parámetros.

4.En estrellas con el mismo número de vértices, pero diferente paso, la que tenga el paso mayor circunscribirá una circunferencia interior de menor radio.

De estas conclusiones se pudo inferir que el radio de la circunferencia interior depende del número de vértices, del paso y del radio de la circunferencia exterior (*resultados*). En esta inferencia, un polígono regular se constituye en un caso especial de estrella cuando el paso tiene un valor de uno. El nuevo problema consistía en saber cuál era la relación existente entre estos cuatro parámetros.

Se decidió entonces redefinir el problema (*control valorativo*), partiendo no de dos circunferencias sino de una circunferencia de radio **R** y una estrella regular inscrita en ella de **N** vértices y paso **P**, para hallar el radio **r** de la circunferencia interior inscrita en la estrella. Con esta inversión de la situación se pretendía explicitar más el problema al definir con precisión los parámetros involucrados y a la vez facilitar su resolución partiendo de casos conocidos como los mostrados en la figura 9. La redacción del problema quedó en los siguientes términos: dada una circunferencia de radio **R**, se puede inscribir en ella una estrella regular de **N** puntas y paso **P** en la cual se puede inscribir a la vez otra circunferencia de radio **r** concéntrica con la anterior. ¿Qué relación matemática existe entre los parámetros **R, r, N** y **P**?

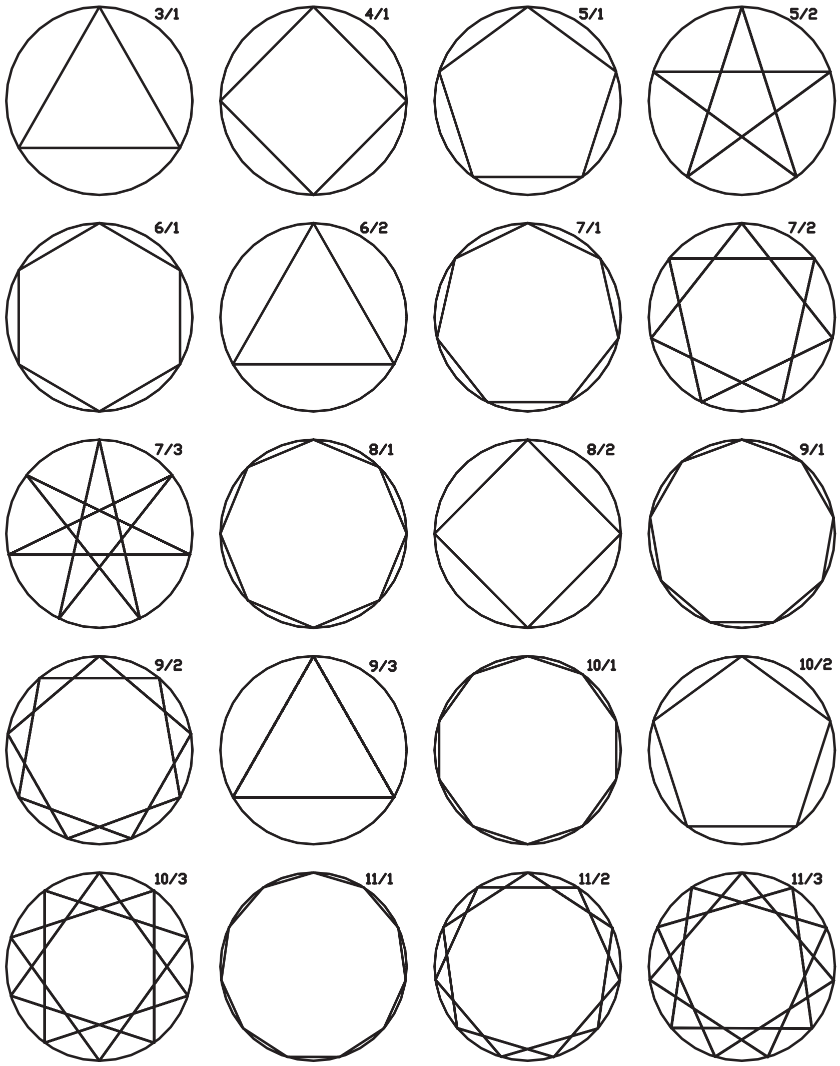

Figura 9. Construcción de polígonos y estrellas con diferente número de vértices y pasos (N/P)

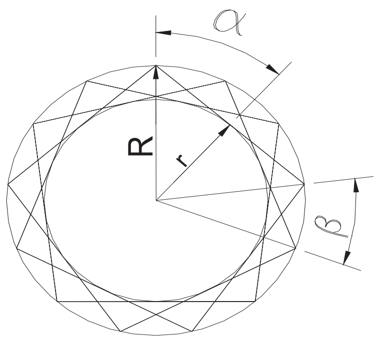

Figura 10. Relación entre los parámetros de generación de una estrella

La nueva presentación del problema se pudo resolver a partir de la figura 10 (*ejecución*), en relación con la cual se plantea la ecuación: $r = R \cdot \cos\alpha$

Pero, $$\alpha = \frac{1}{2} P \cdot \beta$$

Luego, $$r = R \cdot \cos\left(\frac{P \cdot \beta}{2}\right)$$

Además, $\beta = \dfrac{2\pi}{N}$ donde β está dado en radianes

Entonces, $$r = R \cdot \cos\left(\frac{P \cdot \pi}{N}\right)$$

Donde, **R**: radio de la circunferencia exterior

r: radio de la circunferencia interior. r<R

N: número de vértices de la estrella. N>= 3 (número natural)

P: paso de la estrella. 1<= P<N/2 (número natural)

A partir de esta última ecuación se puede entonces hallar el radio de la circunferencia interior en función de los otros parámetros. También se puede expresar R en función de los demás así:

$$R = \frac{r}{\cos\left(\frac{P \cdot \pi}{N}\right)}$$

En ambos casos r y R se pueden expresar con la precisión necesaria sin mayor inconveniente, lo cual no sucede en el caso en que se exprese P o N en función de los demás parámetros, porque se debe tener presente que tanto P como N son números naturales, de tal forma que sólo algunos valores satisfacen la ecuación. La tabla 1 muestra los valores que toma P para distintos valores de N, con una ecuación dada por $P = \frac{N}{\pi} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)$ y una relación $\frac{r}{R} = 0{,}3546$, mientras que la tabla 2 presenta una secuencia de valores de N en función de P obtenidos a partir de la ecuación $N = \frac{\pi \cdot P}{\cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right)}$ y una relación $\frac{r}{R} = 0{,}3182$.

En ambas tablas se han resaltado los casos en que tanto P como N son naturales y satisfacen la ecuación respectiva. Es de destacar que en la misma tabla cada

P	N
1	2,6
2	5,2
3	7,8
4	10,4
5	**13**
6	15,6
7	18,2
8	20,8
9	23,4
10	**26**
11	28,6
12	31,2
13	33,8
14	36,4
15	**39**
16	41,6
17	44,2
18	46,8
19	49,4
20	**52**
21	54,6
22	57,2
23	59,8
24	62,4
25	**65**

Tabla 1. Valores de N en función de P

N	P
5	1,75
6	2,1
7	2,45
8	2,8
9	3,15
10	3,5
11	3,85
12	4,2
13	4,55
14	4,9
15	5,25
16	5,6
17	5,95
18	6,3
19	6,65
20	**7**
21	7,35
22	7,7
23	8,05
24	8,4
25	8,75
26	9,1
27	9,45
28	9,8
29	10,15
30	10,5
60	**21**

Tabla 2. Valores de P en función de N

pareja de datos resulta ser un múltiplo de la pareja de datos menor, por consiguiente al construir las estrellas con ellos se llega al mismo resultado geométrico (*análisis*).

De esta manera se dio respuesta al problema planteado, tanto en su forma redefinida como en su versión inicial, satisfaciendo una curiosidad geométrica, que en principio no tiene aplicación práctica, pero que pueda tenerla en el futuro (*control valorativo*).

3. Conclusiones

Del ejercicio intelectual descrito se pueden plantear las siguientes conclusiones:

1. Asumir el reto de descifrar un enigma que resulta cautivante para un sujeto, permite, además de la obtención de un resultado cognitivo, la inmersión en un proceso que puede ser atractivo en sí mismo.

2. Implicarse en la solución de un problema bajo un esquema como el propuesto por Labarrere, en el que se conjugan procesos interrelacionados de análisis, ejecución y control valorativo, conduce a resultados exitosos, gratificantes y novedosos, aunque sean más exigentes desde el punto de vista intelectual y operativo, que consultarlos en una fuente de información.

4. Referencias Bibliográficas

LABARRERE SARDUY, Alberto Félix (1994). El análisis, la ejecución y el control valorativo durante la solución de problemas. En: Teoría del error aplicada al aprendizaje autónomo. Bogotá: Unisur-Cafam.

VIEDMA C., Juan A. (1968). Lecciones de geometría intuitiva. Cali: Norma.