

Aplicación de controladores en el diseño de una plataforma experimental

Implementation of controllers in the design of an experimental platform

David Castiblanco Ávila¹
Carlos Vergara Ramírez²
Nelson Castañeda Arias³

Resumen

En este artículo se desarrolla el análisis mecánico de un sistema de balancín, se estudian las diferentes fuerzas que intervienen en él para obtener el ángulo de inclinación de la barra principal. A partir de esta información se plantea una función de transferencia, a la cual se le aplican tres diferentes controladores y se busca la respuesta más eficiente entre ellos. Las metodologías clásicas de control aplicadas son adelanto atraso, PID y algebraica, para sintonizar los polos esperados se utiliza el método ITAE y para finalizar se implementa el método IAE a cada controlador para saber los grados de error de cada uno.

Palabras clave: control, función de transferencia, adelanto atraso, PID, algebraico, ITAE, IAE.

Abstract

In the following paper a mechanical analysis of a seesaw system is developed, different forces that are involved in it to obtain the angle of inclination of the main bar are studied. Based on this information, a transfer function is proposed, to which three different controllers are applied and the most efficient response between them is sought. The classic control methodologies applied are advanced delay, PID and algebraic, the ITAE method is used to tune the expected poles and finally the IAE method is implemented to each controller to know the degrees of error of each one.

Key words: control, transfer function, advanced delay, PID. Algebraic, ITAE, IAE

Citación del artículo

Castiblanco, D., Vergara, C., y Castañeda, N. (2018). Aplicación de controladores en el diseño de una plataforma experimental. *Letras Conciencia Tecnológica*, 18(16), X-XX.

1 Tecnólogo en automatización industrial, integrante del grupo de investigación Techne, estudiante de Ingeniería en Mecatrónica. Correo electrónico: dncastiblanco@itc.edu.co

2 Ingeniero en control, especialista en Informática y Automática Industrial, estudiante de maestría en Automatización Industrial, director del grupo de investigación Techne, docente de las asignaturas de control, Facultad de Mecatrónica. Correo electrónico: cfvergarar@itc.edu.co

3 Ingeniero en control, magíster en Automatización Industrial, director del semillero Isqua, docente de las asignaturas de control, Facultad de Mecatrónica. Correo electrónico: nacastanedaa@itc.edu.co

1. Introducción

En la actualidad existen diversos sistemas que se comportan de acuerdo con su composición, algunos tienen respuestas más rápidas que otros, influyendo los cambios que pueden tener las variables del proceso. Es en este punto en que la humanidad ha propuesto demostraciones matemáticas para el diseño de controladores y así obtener resultados que nos aporten beneficios en diferentes procesos que están inmersos en nuestras investigaciones. En este documento se realiza un análisis mecánico de un sistema de balancín, con ello se obtiene la función de transferencia y así se proponen diferentes metodologías de controladores para realizar una comparación entre ellos, y obtener el mejor comportamiento a partir de su eficiencia.

Los controladores que se utilizarán en esta planta están diseñados matemáticamente para comprobar la estabilidad del sistema, de acuerdo con la relación entre el ángulo de inclinación del eje central y la velocidad producida por un motor. Este desarrollo espera modelar las repuesta transitoria para poder estabilizar y eliminar el error en estado estacionario del sistema, por ello se describirán unos valores de desempeño que debe cumplir la planta al aplicarle los respectivos controladores. Se plantean tres tipos de controladores, los cuales son: adelanto atraso, PID y por método algebraico, se compararán las respuestas y se espera encontrar el método que mejor modele este sistema. El desarrollo de esta actividad investigativa se plantea para obtener una metodología que pueda ser aplicada en las diferentes propuestas que tiene el grupo de investigación Techne.

2. Metodología

Este artículo está desarrollado a partir de la metodología planteada en la figura 1.

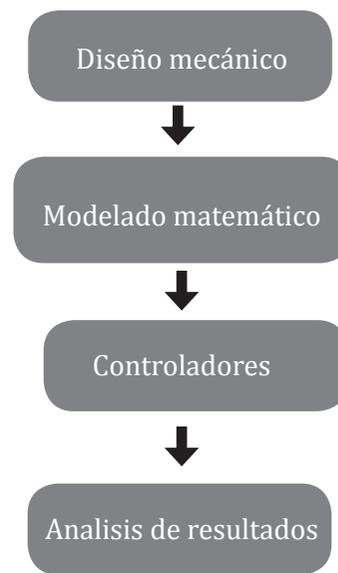


Figura 1. Metodología
Fuente autores

2.1. Diseño mecánico

El diseño del modelo mecánico fue desarrollado con base al funcionamiento de un sistema de balancín, este debe cumplir con unas características planteadas para la obtención del controlador de posición. La planta está compuesta por un eje central que cumple la función de cambiar de su inclinación a partir del funcionamiento de un motor que está sujeto a este. El eje secundario atraviesa al principal en su centro de masa para crear un movimiento de rotación que es producido con la ayuda de un rodamiento, además este eje también se encuentra unido a un potenciómetro que indica la posición angular del eje principal. Para el desarrollo de este modelo mecánico se recomienda utilizar aluminio 6061, un motor DC con velocidad de 28800 rpm, una hélice como se muestra en la figura 2, para la rotación del eje secundario un rodamiento de diámetro interno de 5 mm, las piezas de sujeción como la del eje principal y la del motor, se recomienda realizarse en el mismo material de la estructura, con los procedimientos mecánicos necesarios para obtener unas buenas tolerancias en el ajuste.

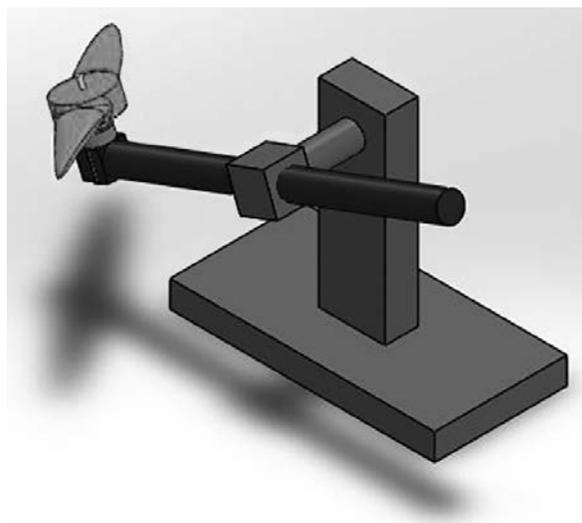


Figura 2. Diseño del modelo mecánico planteado.
Fuente autores

2.2. Modelado matemático

Para obtener la función de transferencia se realizó el análisis del comportamiento mecánico de la planta, haciendo relación con diferentes ecuaciones físicas que describen el comportamiento de esta.

2.2.1. Movimiento de rotación

En este apartado se describe el movimiento de rotación producido por un sólido que gira alrededor de su eje central de inercia, para ello implementaremos la ecuación 1, con la cual podremos calcular la aceleración angular de este elemento. Así como lo propone Viltres (2012) en la siguiente ecuación.

$$\sum(\vec{r}) \times (\vec{F}_{\text{ext}}) = I\vec{\alpha}$$

Ecuación 1

Con la aceleración angular podemos describir la variación del estado de rotación de un sólido que es determinada con la modificación de la velocidad angular de este. Esta ecuación nos describe el movimiento de rotación de un cuerpo rígido y se empleara para describir el movimiento de esta planta.

2.2.2. Momento de inercia

Este sistema contiene dos elementos que producen momentos de inercia y cada uno de ellos debe ser analizado independientemente, para así poder obtener el momento de inercia general de la planta. Los elementos por analizar son la masa del motor y la masa del eje principal, para ello utilizaremos la ecuación 2 (Viltres, 2012).

$$I = \sum m_i l_i^2$$

Ecuación 2

Donde l_i es la distancia al eje de rotación y m_i masa de la partícula. Para nuestro caso se escribirá la ecuación para una sola masa puntual, en este caso analizaremos el motor (Viltres, 2012).

$$I_m = m_m l^2$$

Ecuación 3

Para el cálculo del momento de inercia del eje central tendremos en cuenta sus características, como lo son la masa M y la longitud L , sin olvidar que existe un eje perpendicular que atraviesa esta varilla en su censo de masas. El momento de inercia de este elemento lo describiremos con la ecuación 4 (Viltres, 2012).

$$I_c = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} X^2 dx = \frac{1}{12} ML^2$$

Ecuación 4

La masa del eje principal la obtendremos a partir de la ecuación 5, donde M es la masa total, V es el volumen y ρ es la densidad.

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Ecuación 5

Al obtener el resultado de las ecuaciones 3 y 4 podemos obtener el momento de inercia total a partir de la ecuación 6 (Viltres, 2012).

$$I_T = I_c + I_m$$

Ecuación 6

Con los resultados arrojados podremos obtener el modelo matemático con el método de las transformadas de Laplace.

2.2.3. Función de transferencia

Para obtener la función de transferencia debemos realizar un plano de fuerzas donde se contemple la variación angular del eje principal, en la figura 3 podemos detallar las fuerzas presentes en la planta.

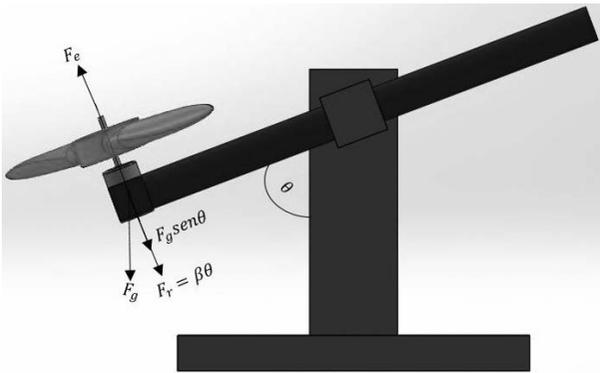


Figura 3. Descomposición de fuerzas.
Fuente autores

Para obtener la función de transferencia se utilizará la ecuación 1 del movimiento de rotación, a la cual se le aplicará la transformada de Laplace para tener como resultado un modelo aproximado, sobre el cual se desarrollarán los respectivos controladores. La ecuación de movimiento se tomará en el eje secundario, el que está ubicado en el centro de gravedad, por lo tanto, las fuerzas del eje principal son nulas, ya que al estar las fuerzas en ambos lados del eje de inercia estas se compensarán. Las fuerzas de interés del sistema son la masa del motor y la de fricción del eje secundario, a raíz de que tiene un arreglo mecánico que lo une, integra un potenciómetro y este influye en el movimiento. A partir de los fundamentos ya sustentados aplicaremos la ecuación 1 para obtener la 7.

$$lF_e - IF_g \sin\theta - l\beta\theta = I\alpha$$

Ecuación 7

Donde θ es la posición de la barra con respecto al eje del giro, consideramos los cambios de ubicación muy pequeños, por lo tanto $\sin\theta \approx \theta$ en [rad], l es el tamaño longitudinal desde el centro a un extremo del eje, IF_g es la fuerza de gravedad que actúa sobre el motor, β es el coeficiente de rozamiento, I es el momento de inercia de la planta, α es la aceleración angular, IF_e es la fuerza de empuje que la podemos expresar en la ecuación 8 (Viltres, 2012).

$$lF_e = \frac{1}{2}\rho V^2 S_{ref} C_L$$

Ecuación 8

Donde ρ es la densidad del aire, $\frac{Kg}{m^3}$ V es la velocidad de giro de la hélice $\frac{m}{s}$, S_{ref} es el área que forma la hélice al girar m^2 , C_L es el coeficiente de elevación [admiens]. La ecuación 7 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\frac{lF_e}{I} - \frac{IF_g}{I}\theta - \frac{l\beta}{I}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ecuación 9

Aplicando la transformada de Laplace, y teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas, obtenemos la ecuación 10.

$$\frac{l}{I}F_e(s) = s^2\theta(s) + \frac{l\beta}{I}s\theta(s) + \frac{IF_g}{I}\theta(s)$$

Ecuación 10

Realizando el factor común de $\theta(s)$ relacionamos la entrada con la salida de la planta, para obtener la función de transferencia expresada en la ecuación 11.

$$\frac{\theta(s)}{F_e(s)} = \frac{\frac{l}{I}}{s^2 + \frac{l\beta}{I}s + \frac{IF_g}{I}}$$

Ecuación 11

Aplicando una entrada de 1N obtendremos la respuesta en radianes que encontramos en la figura 4.

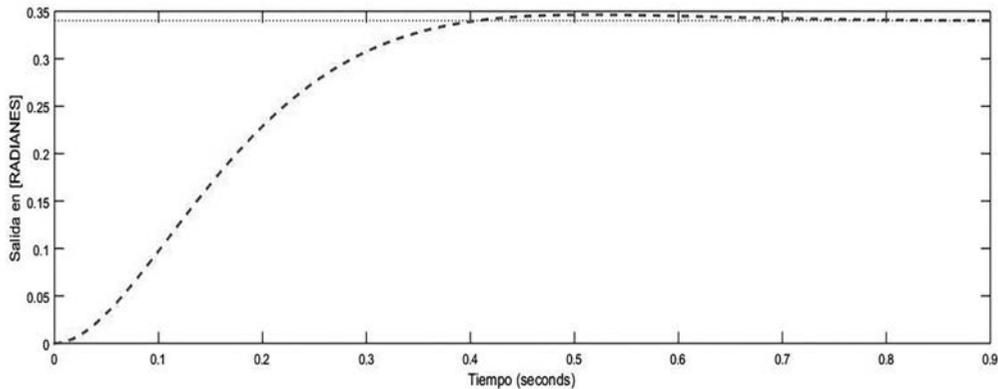


Figura 4. Salida del sistema en lazo abierto.
Fuente autores

2.3. Controladores

La función de transferencia obtenida se le aplicará a tres tipos de controladores diferentes buscando el método matemático más eficiente, el primer controlador tiene una estructura clásica de adelanto atraso, la segunda estructura a implementar es un PID y la tercera y última es un controlador algebraico.

2.3.1. Controlador adelanto atraso

La ubicación de los polos deseados se realizó a partir de los criterios del ITAE, se utilizó el compensador de adelanto expresado en la ecuación 12, también se implementó el compensador de atrasado al cual se obtuvo con el límite de la función y del controlador en adelanto. Utilizando la metodología del lugar de las raíces para encontrar los parámetros de los compensadores.

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

Ecuación 12

2.3.2. PID

La ubicación de los polos deseados se realizó a partir de los criterios del ITAE, se utilizó la estructura PID que se encuentra en la ecuación 13. Donde K_p es

la ganancia proporcional, T_i la constante de tiempo integral y T_d la constante de tiempo derivativa.

$$G_c(s) = K_p \left[\frac{(sT_d + 1) + (s + T_i)}{s} \right]$$

Ecuación 13

2.3.3. Algebraicos

La ubicación de los polos deseados se realizó a partir de los criterios del ITAE, de acuerdo con la orden de la función de transferencia se deben agregar polos a la función canónica obtenida con el ITAE. Se realiza un arreglo matricial para obtener los valores finales del controlador, se utiliza la estructura expuesta en la ecuación 14.

$$G_c(s) = \frac{\beta_n + \beta_{n-1} + \beta_{n-2} \dots \beta_{n-m}}{\alpha_n + \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \dots \alpha_{n-m}}$$

Ecuación 14

3. Resultados

Las características del sistema utilizadas para el planteamiento de la función de transferencia fueron las siguientes, masa del motor 0.3 kg, distancia de la masa al eje de rotación: 0.1 m, densidad del aluminio $2700 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, tamaño del eje de aluminio: 0.2 m, diámetro del eje de aluminio: 0.005 m.

Los controladores respondieron de maneras diferentes al aplicar el método de sintonización ITAE, se evidenciaron mejores respuestas transitorias

y en estado estacionario. El controlador de adelanto atraso se caracteriza porque la sintonización no es tan precisa y se debe modificar el máximo pico o ζ , para esta implementación se obtuvo una ganancia en adelanto de 1,08 y una ganancia en atraso de 1,08. El controlador PID fue sintonizado con un K_p de 0,29 un Td de 10,74 y un Ti de 16,03. La respuesta en estado estacionario es mucho más rápida que los otros dos controladores. Por último, para los controladores algebraicos de enfoque interno los parámetros obtenidos se encuentran expresados en la ecuación 15, este se

obtuvo a partir de un proceso matemático que retroalimenta de manera lineal la respuesta final.

$$C(s) = \frac{503,79s^2 + 7486s + 45,3 \times 10^3}{92,53s^2 + 1533s}$$

Ecuación 15

Las perturbaciones en este sistema se realizaron con la aplicación de 0.1 K/N, y se analizó la respuesta y el comportamiento como se evidencia en la figura 5.

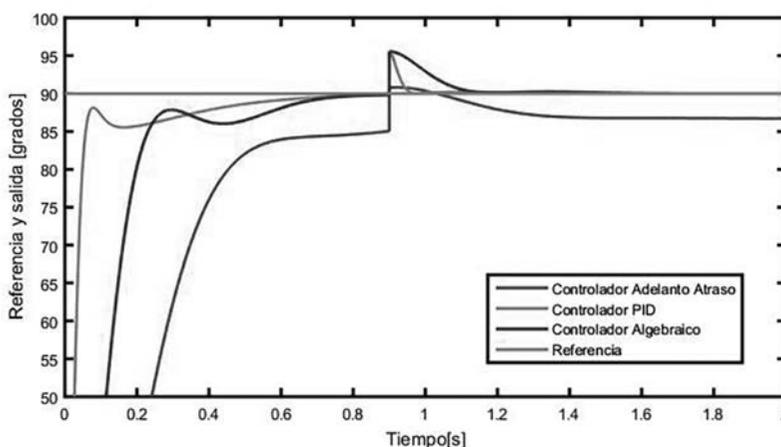


Figura 5. Respuesta de los controladores frente a una perturbación.
Fuente: autores

La respuesta que tienen los controladores demuestra que no están diseñados para evitar perturbaciones, pero aun así estos se lograron estabilizar y mantener su posición en la respuesta de estado estacionario. Sin embargo, este no es el único parámetro que puede llegar a definir la eficiencia de los controladores, ya que se logró analizar el IAE de los tres controladores arrojando el resultado expuesto en la tabla 1.

Tabla 1. Resultados análisis IAE

Adelanto Atraso	PID	Algebraico
26,82	4,2	12,16

Este número representa los grados de error que tiene estos tres controladores.

4. Conclusiones

Se logra demostrar cómo se comportan los controladores desarrollados cuando se implementan en una planta o modelo matemático, es importante mencionar que este recorrido nos arroja resultados interesantes, como la eficiencia del PID como controlador para este sistema, aunque se esperaba que el método algebraico obtuviera unos mejores resultados. Sin embargo, no se debe olvidar que la sintonización de los controladores se realizó por LGR y esto puede llegar a influir en la respuesta de los controladores. Se pudo evidenciar cómo el ITAE puede llegar a ser una técnica de integración que ayuda a disminuir la cantidad del error antes de llegar a su posición de estacionamiento, y la ayuda del

IAE fue importante para el análisis del error en la retroalimentación del sistema, esto nos ayuda a comprobar cuáles controladores presentan mayor grado de error.

El desarrollo de este documento refleja las técnicas que se pueden llegar a aplicar en cualquier escenario posible, sin embargo, se debe realizar una plataforma en la que se pueda evidenciar el comportamiento de la planta y así poder comprobar la respuesta de los controladores.

5. Referencias bibliográficas

Artale, V., Milazzo, C., y Ricciardello, A. (2013). Mathematical modeling of hexacopter. Applied

Mathematical Sciences, 7, 4805-4811. doi: 10.12988/ams.2013.37385.

Chen, C. (2006). Analog and digital control system design, (1.st edition). Oxford University Press.

Sears, F. (2011). Física universitaria con física moderna, (1.st edition). Pearson Educación de México S. A.

Ogata, K. (1990). Modern control engineering, (4.st edition). London: Prentice-Hall International.

Viltres, F. (2012). Control de posición de un balancín con motor y hélice, 1.st edition. España

