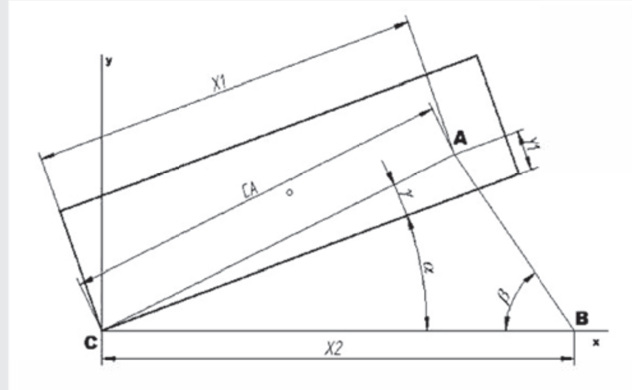
Modelado matemático de un problema de diseño mecánico



Hernán Darío Cortés Silva*

Mathematical Modeling of a Mechanical Design problem

Resumen

Se describe el procedimiento seguido para modelar matemáticamente un problema de diseño mecánico. Casos como este conllevan muchas veces la dificultad intrínseca para el estudiante de ingeniería de relacionar la situación física con la representación matemática. El caso en estudio busca optimizar la posición de los cilindros hidráulicos que accionan el platón de una volqueta, posición que está influida por distintas variables de fuerza, dimensión y posición.

Palabras claves: modelado matemático, estática, mecánica, hoja electrónica

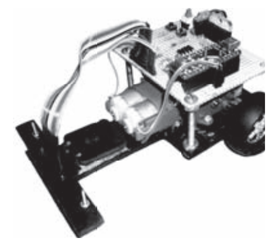
Abstract

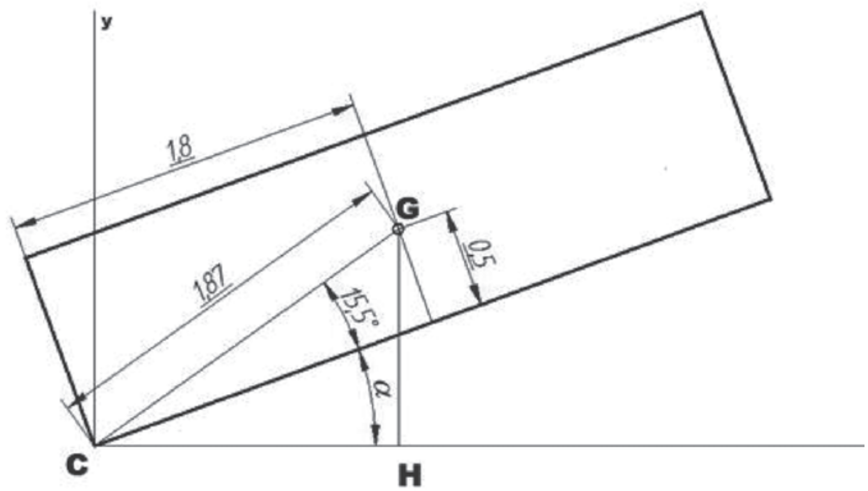
This article describes the process that was used to model mathematically a mechanical design problem. Some cases like this often involves an intrinsic difficulty for engineering students when relating the physical situation with the mathematical representation. The study case aims to optimize the position of the hydraulic cylinders that drive the dumping bed of a dump truck, this position is influenced by different strength, size and position variables.

Key words: mathematical modeling, statics, mechanics, spreadsheets

Fecha de recepción: Mayo 4 de 2012 Fecha de aprobación: Junio 13 de 2012

* Ingeniero Mecánico. Especialista en Pedagogía. Profesor Asistente de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central. Profesor del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Central en Bogotá. Integrante del grupo de Investigación VIRTUS de la ETITC Correo electrónico: dariocortes61@gmail.comhcortess@ucentral.edu.co





1. Introducción

El caso que se presenta en este escrito se refiere al estudio realizado con grupos de investigadores de Diseño de Máquinas de la Escuela Tecnológica Instituto Técnico Central y de Estática de la Universidad Central, optimizando la ubicación de los apoyos de los cilindros hidráulicos para realizar el volteo del platón de una volqueta. La exigencia del problema es que se debe optimizar una configuración cuya complejidad está determinada por cuatro o cinco variables. En razón a lo anterior, es indispensable modelar matemáticamente la situación para darle luego un tratamiento numérico con apoyo de una hoja electrónica.

El procedimiento seguido en este caso, es transferible a diversas situaciones problemáticas de ingeniería que se comportan de manera similar, en las cuales existen variables que dependen de otras en forma relativamente compleja y por tanto, se necesita de una herramienta computacional para lograr establecer la relación existente entre ellas.

2. Problema propuesto

El problema es planteado en el libro de *"Estática de Bedford y Fowler"* (2008), y se describe así: "La plataforma de un camión de volteo (figura a) se eleva mediante dos cilindros hidráulicos de tándem AB (figura b). La masa de la plataforma del camión y su carga es de 16.000 kg y su peso actúa en el punto G (suponga que la posición del punto G relativo a la plataforma no cambia cuando se levanta la plataforma).

1. Dibuje una gráfica de la magnitud de la fuerza total que los cilindros hidráulicos deben ejercer para soportar la plataforma en reposo para valores del ángulo α desde cero hasta 30°.

2. Considere otras opciones para las ubicaciones de los puntos de unión A y B que parezcan ser factibles e investigue cómo afectan sus elecciones a la magnitud de la fuerza total, que los cilindros hidráulicos deben ejercer cuando α varía desde cero hasta 30°. Asimismo compare los costos de sus elecciones de los puntos de unión con las opciones mostradas en la figura (a), suponiendo que el costo de los cilindros hidráulicos es proporcional al producto de la fuerza máxima que deben ejercer cuando α varía de cero a 30° y su longitud cuando α=30°." (Bedfor,2008), (Ver figura 1).

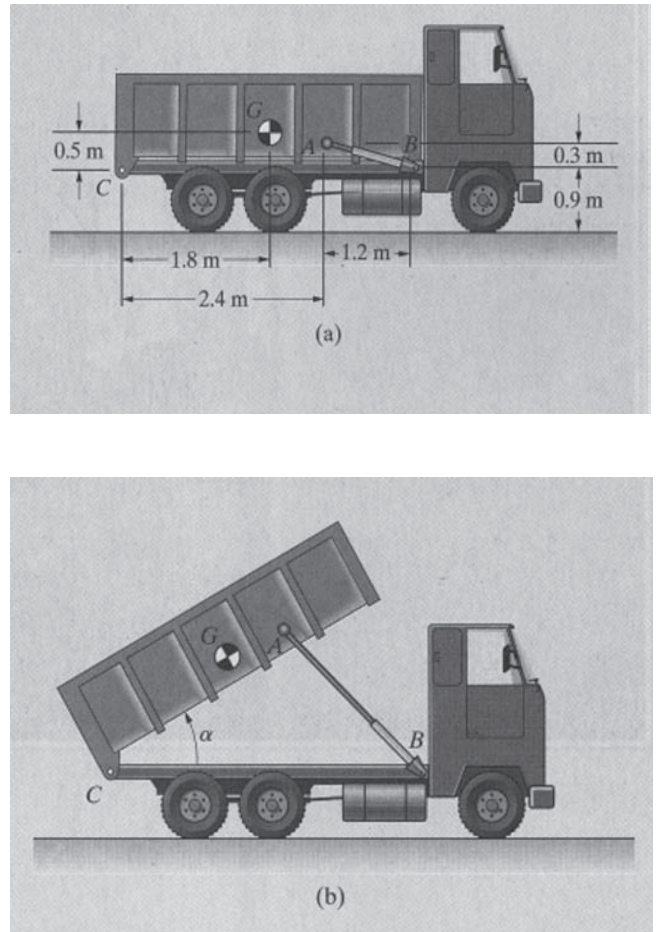
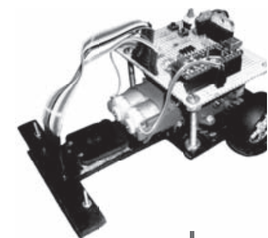


Figura 1: Esquema para el planteamiento del problema
Fuente: Bedford y Fowler (2008)

3. Proceso de modelado matemático

El proceso de solución a la situación planteada se realiza en varias etapas y se constituye en un modelo aplicable en clase para resolver diferentes problemas físicos, mediante su modelado matemático, cuyo estudio, aplicación y apropiación hace parte de la formación.

El modelado busca establecer las funciones matemáticas entre una o más variables de entrada y salida, con lo cual se pueden optimizar. El modelado se realiza en dos formas diferentes dependiendo de la información de entrada disponible que tenga cada problema. En la primera forma se parte de un planteamiento cuyas características permiten ubicar la situación en una determinada área del conocimiento humano, cuyas leyes y principios se aplican para establecer las relaciones analíticas entre las variables o parámetros involucrados en el caso. En la segunda, no se cuenta con tales leyes, de manera que las variables se miden experimentalmente para obtener los datos que



recibirán un tratamiento numérico, dando como resultado el modelo que relacione las variables.

En el caso planteado de la volqueta se aplica el primero de estos dos procesos de modelado, con las siguientes etapas: Identificación del objetivo perseguido, identificación de los parámetros que intervienen en el fenómeno estudiado, identificación de las leyes y principios que rigen el fenómeno, aplicación de las leyes para establecer las funciones que relacionan los parámetros, resolución matemática de las funciones resultantes para optimizar el valor de los parámetros.

3.1. La identificación del objetivo perseguido

Esta etapa tiene el propósito de mantener enfocada la visión, en particular cuando se presenta una encrucijada en el desarrollo del problema, en este momento es necesario buscar una alternativa respecto al proceso que se sigue. En problemas académicamente estructurados, como es el caso actual, los objetivos están dados en el planteamiento del mismo. En otros casos, es indispensable identificarlos desde el comienzo y si es necesario, revaluarlos a lo largo del proceso.

En el problema actual los objetivos son dos: graficar la función que relaciona la fuerza de los cilindros y el ángulo de inclinación de la plataforma y definir la ubicación de los puntos de anclaje de los cilindros, de tal forma que el costo de los mismos sea el mínimo posible.

3.2. Identificación de los parámetros que intervienen en el fenómeno estudiado

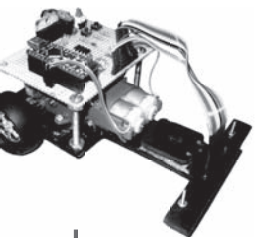
Los parámetros pueden ser variables, constantes o datos relacionados con la situación y se pueden clasificar en tres categorías de parámetros que son: entrada, salida e intermedios. Para este caso práctico los parámetros identificados se presentan en la tabla 1.

Parámetro	Símbolo	Unidad
Ángulo de inclinación de la plataforma	α	Grados (°)
Ángulo de inclinación de los cilindros	β	Grados (°)
Longitud de los cilindros	L	Metros (m)
Coordenadas del punto A	X1, Y1	Metros (m)
Coordenadas del punto B	X2, Y2	Metros (m)
Fuerza en los cilindros	F	Newtons (N)

Tabla 1. Parámetros identificados en el caso propuesto

3.3. Identificación de las leyes y principios que rigen el fenómeno estudiado

Para el problema planteado, es necesario identificar las leyes o principios que regulan el fenómeno, ya que son ellas las que permitirán establecer relaciones ciertas entre los parámetros, con el propósito de identificar la función que vincula las variables de entrada con las de salida.



Las leyes identificadas en el caso de la volqueta fueron: Equilibrio estático, Geometría de triángulos y Trigonometría en triángulos rectángulos.

3.4. Aplicación de leyes para establecer las funciones que relacionan los parámetros

Las funciones que interesa identificar son dos: la relación entre la fuerza de los cilindros y el ángulo de la plataforma (α) y la relación entre la longitud de los cilindros y el mismo ángulo.

Al aplicar las leyes anteriores, es conveniente realizar esquemas adicionales a los que presenta el planteamiento del problema porque ello permite visualizar en conjunto los parámetros estudiados. Para comenzar, un esquema típico es el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL), técnica ampliamente conocida en ingeniería mecánica para el estudio de fuerzas (Ver figura 2).

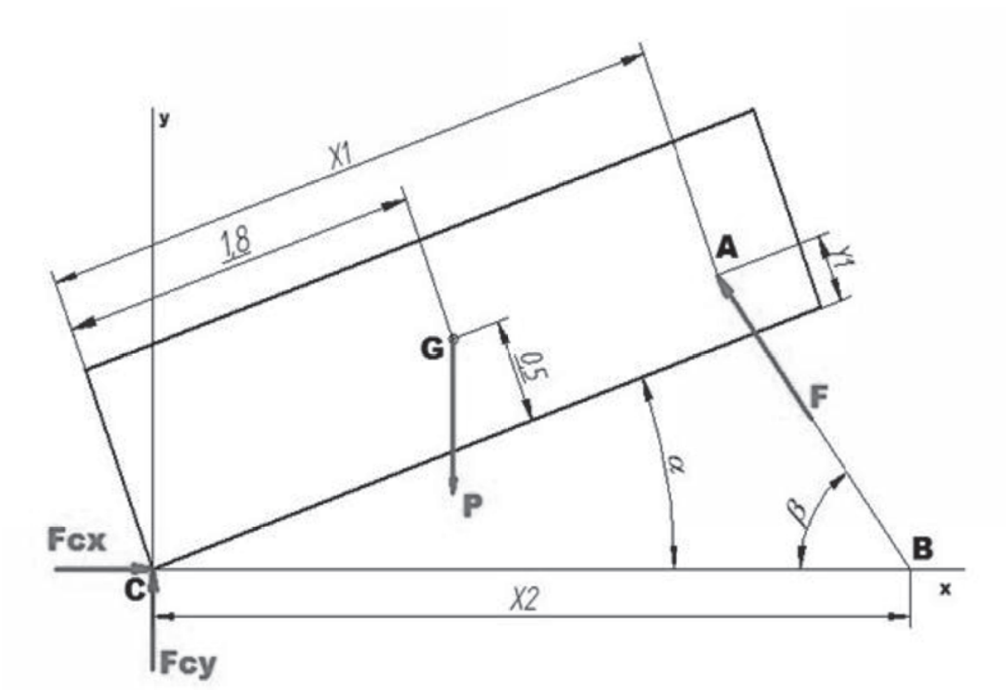


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre del platón
Fuente: el autor

El DCL mostrado corresponde a un caso de equilibrio de cuerpo rígido en 2D y del cual se desprende la siguiente ecuación:

$$-P\cdot(CG\cdot\cos(BCG))+F\cdot\operatorname{sen}(\beta)\cdot X2=0$$

A partir de esta ecuación se puede expresar la fuerza **F** en función del ángulo α, siempre y cuando primero se exprese el ángulo BCG en términos de **α**. Para hacerlo se recurre a reconstruir un triángulo rectángulo determinado por los puntos C, G y H, como se muestra en la figura 3, en la cual el ángulo BCG buscado es el mismo ángulo HCG.

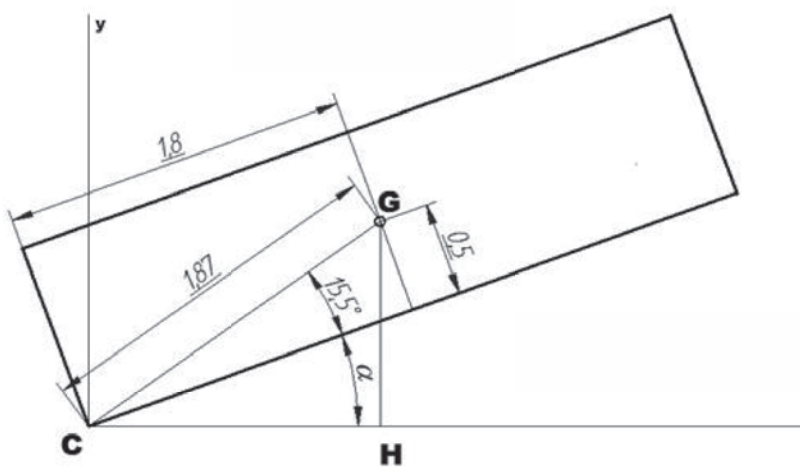


Figura 3: Esquema para expresar el ángulo BCG en términos de α
Fuente: el autor

De la figura 3 se obtiene:

$$BCG = HCG = 15{,}52° + \alpha.$$

Entonces, la fuerza F se expresa de la siguiente manera:

$$F = \frac{P \cdot 1{,}868 \cdot \cos(15{,}52° + \alpha)}{sen\beta \cdot X2}$$

Como el valor de β no es conocido, debe determinarse, para ello, se recurre a un nuevo esquema en el cual se puedan relacionar los parámetros geométricos α y β. (Ver figura 4).

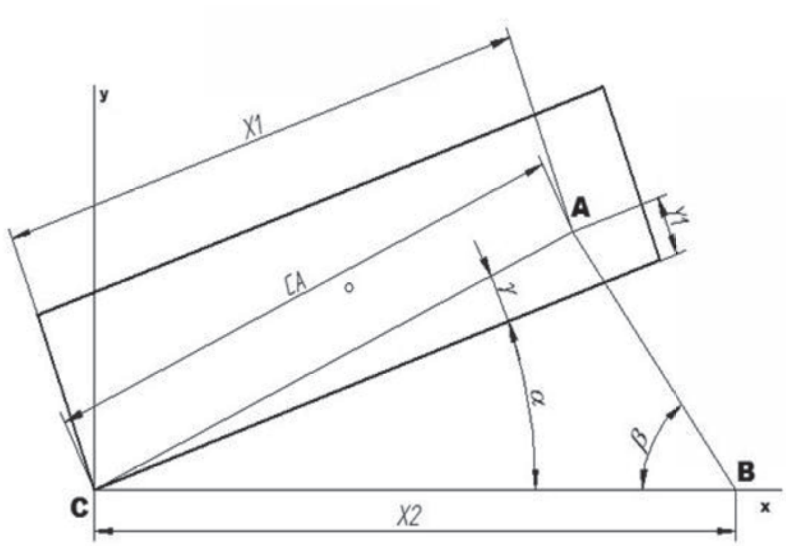
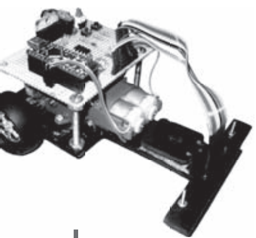


Figura 4: Parámetros geométricos del triángulo ABC. Fuente: el autor



A partir del triángulo ABC de la figura 4 se pueden expresar sucesivamente los siguientes parámetros en función de los establecidos antes:

- El valor de γ en función de las coordenadas X1 y Y1 del punto A. Se aplica la función tangente definida en el triángulo rectángulo.
- El lado CA en función de las coordenadas X1 y Y1. Se aplica el Teorema de Pitágoras.
- El lado AB, en función de α, γ, X2 y CA. Se aplica el Teorema de los cosenos.
- Finalmente, se expresa el valor de β en función de CA, AB, α y γ. Se aplica el Teorema de los senos.

Las relaciones concretas que se obtienen son:

$$\gamma = \text{atan} \left(\frac{Y1}{X1} \right)$$

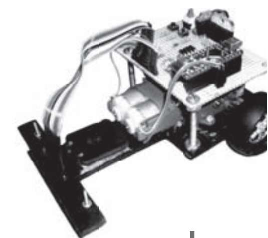
$$AB=\sqrt{CA^2+X2^2-2 \cdot CA \cdot X2 \cdot \cos(\alpha+\gamma)}$$

$$\beta = asen \left(\frac{CA}{AB} \cdot sen(\alpha+\gamma) \right)$$

De lo expuesto se pueden sintetizar las relaciones entre los parámetros de entrada, salida e intermedios que se presentan en la secuencia en que deben calcularse:

	PARÁMETROS	RELACIÓN ENTRE PARÁMETROS	Rango
Entrada	P		Arbitrario
	X1		1,9 a 3,6 m
	Y1		0,3 a 0,9 m
	X2		X1 a 3,6 m
	Y2		Fijo en 0 m
	α		0° a 30°
Intermedios	Ángulo γ	$\gamma = \text{atan}\left(\frac{Y1}{X1}\right)$	
	Distancia CA	$CA = \sqrt{X1^2 + Y1^2}$	
	Distancia AB	$AB = \sqrt{CA2^2 + X2^2 - 2 \cdot CA \cdot X2 \cos(\alpha + \gamma)}$	
	Ángulo de inclinación de cilindros β	$\beta = \text{asen}\left(\frac{CA}{AB} \cdot \text{sen}(\alpha + \gamma)\right)$	
Salida	Fuerza de cilindros F	$F = \frac{P \cdot 1{,}87 \cdot \cos(15{,}5° + \alpha)}{sen\, \beta \cdot X2}$	
	Longitud de cilindros L	$L = AB$	

Tabla 2. Parámetros que intervienen para determinar la fuerza y longitud de los cilindros



La coordenada Y2 se considera cero en cualquier caso, debido a que la posibilidad de variar verticalmente el punto de anclaje B sobre el chasis es mínima. (Ver tabla 1)

3.5. Resolución matemática de las funciones resultantes para optimizar el valor de los parámetros

Del desarrollo matemático se concluye que para poder expresar la fuerza F y la longitud L del cilindro en términos de los parámetros de entrada, el método analítico resulta bastante complejo, porque se necesitaría remplazar cada una de las ecuaciones en las subsiguientes. La complejidad resultante aumenta la posibilidad de error y, de ocurrir, se dificultaría ubicar el punto en el cual éste se produce. Por lo tanto, es conveniente recurrir a la ayuda de la computadora, mediante la hoja electrónica, en la cual se pueden introducir las ecuaciones obtenidas, graficar la fuerza en términos del ángulo α, y encontrar las coordenadas X1, Y1 y X2 de emplazamiento del cilindro, para obtener un costo mínimo.

Con la idea expuesta, los parámetros incluidos en la tabla anterior se incorporaron en una hoja electrónica (Ver figura 5).

En ella se distinguen los parámetros del caso en estudio definidos en:

X1, Y1 y X2 que se pueden variar mediante barras de desplazamiento respectivas en los rangos mostrados en la tabla 1.

El ángulo γ, la distancia CA y la carga P se definen como parámetros con un solo valor, e independientes del ángulo α.

El ángulo α, se incluye como parámetro de entrada, definido en el rango de 0° a 30°, con intervalos de 1°. El ángulo β es un parámetro intermedio, dependiente de α.

La distancia AB y la fuerza en los cilindros F, son parámetros de salida, definidos para cada valor del ángulo α.

El producto de la fuerza máxima en los cilindros y la longitud máxima de los mismos.

También se muestran en la hoja dos gráficas: la primera muestra la fuerza en los cilindros en función del ángulo de inclinación de la plataforma (α), la cual corresponde al primer objetivo del caso en estudio. La segunda, expresa la longitud de los cilindros en función del mismo ángulo.

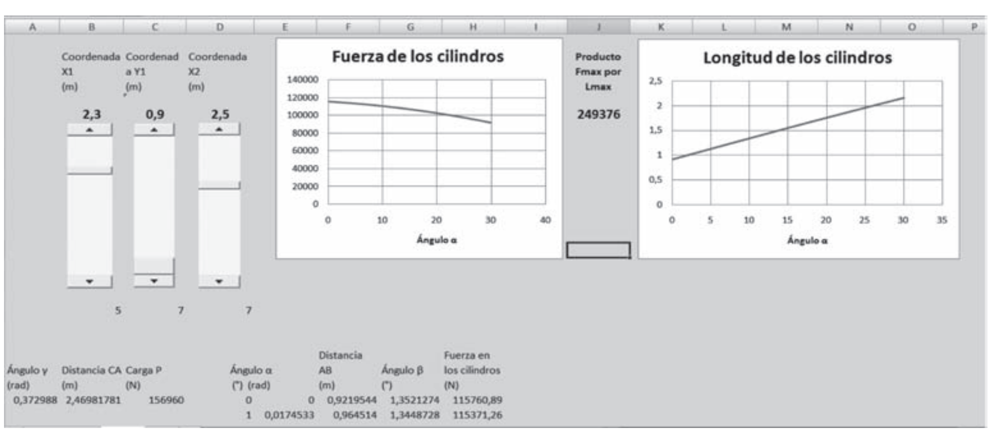
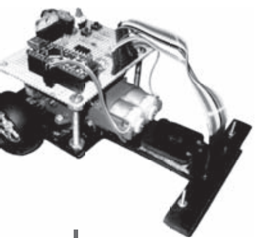


Figura 5: Aspecto de la hoja de cálculo utilizada para seleccionar las coordenadas de los puntos de anclaje de los cilindros. Fuente: el autor



En la figura, las coordenadas de los puntos de anclaje de los cilindros (X1, Y1 y X2), se pueden variar por desplazamiento de los cursores respectivos, con lo cual se podrá observar que varían los parámetros antes descritos. De estos parámetros interesa conocer, en particular, cómo varía el producto entre la fuerza máxima en los cilindros y su longitud máxima, porque el valor mínimo de este producto determina el costo mínimo de los cilindros, cuya obtención se constituye en el segundo objetivo planteado para el ejercicio.

Aunque la búsqueda del valor mínimo del producto indicado se puede hacer por desplazamiento manual de los cursores mencionados, la hoja electrónica cuenta con una función que ayuda a realizar esta búsqueda de una manera más ágil. Se trata de la función Solver de Excel, que opera de la siguiente manera.

Solver se activa desde la herramienta ***Datos*** con lo cual se despliega la ventana mostrada en la figura 6.

En la ventana desplegada se configuran los siguientes datos:

- En la casilla identificada como ***Establecer objetivo*** se registra la celda que se quiere minimizar, correspondiente al producto de la fuerza máxima por la longitud máxima (celda J6 en la hoja usada).
- Se activa el botón de minimizar (Min).
- En la casilla ***Cambiando las celdas de variables*** se identifican las celdas asociadas con los cursores de las coordenadas X1, Y1 y X2 (celdas B19, C19 y D19).
- Se introducen los rangos en que se variarán las coordenadas anteriores en la casilla ***Sujeto a las restricciones***.

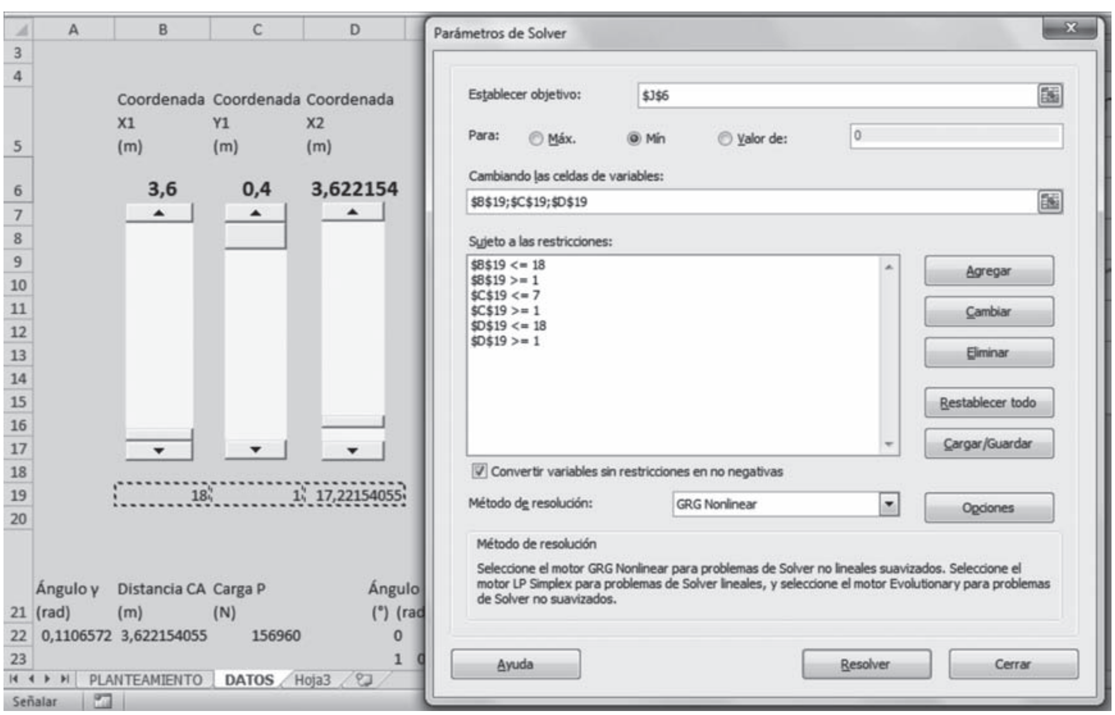
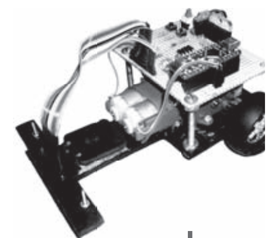


Figura 6: Ventana de la función Solver.
Fuente: el autor



Cuando se activa el botón ***Resolver***, el sistema modifica sucesivamente los valores de las coordenadas hasta encontrar el valor mínimo del producto de la fuerza máxima por la longitud máxima, (Ver figura 7) y el cumplimiento de los objetivos del ejercicio se logra con los resultados (Ver figura 8).

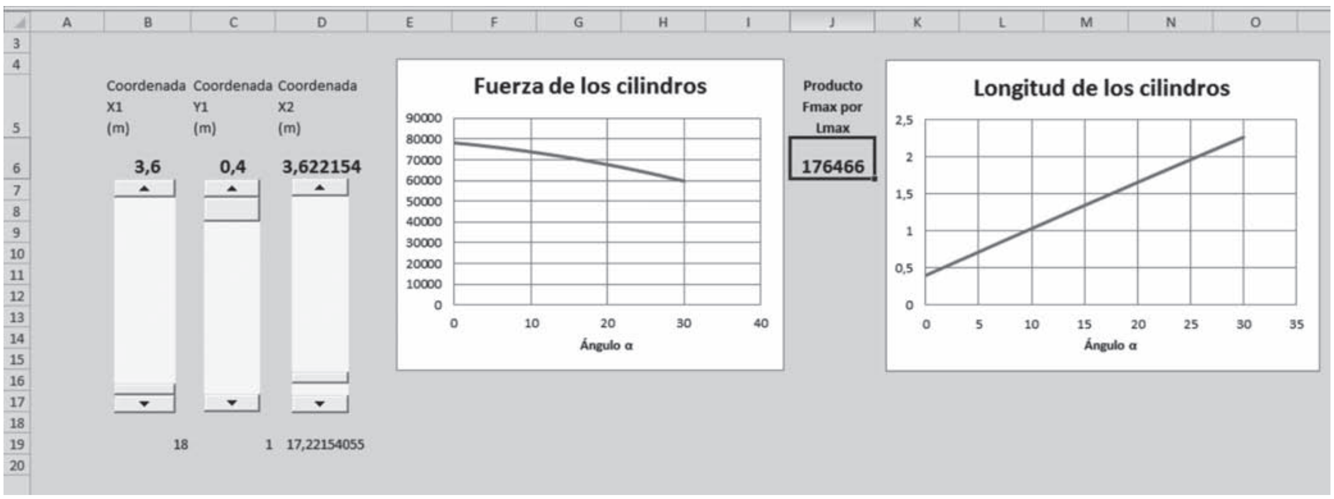


Figura 7: Resultado obtenido al aplicar la función Solver
Fuente: el autor

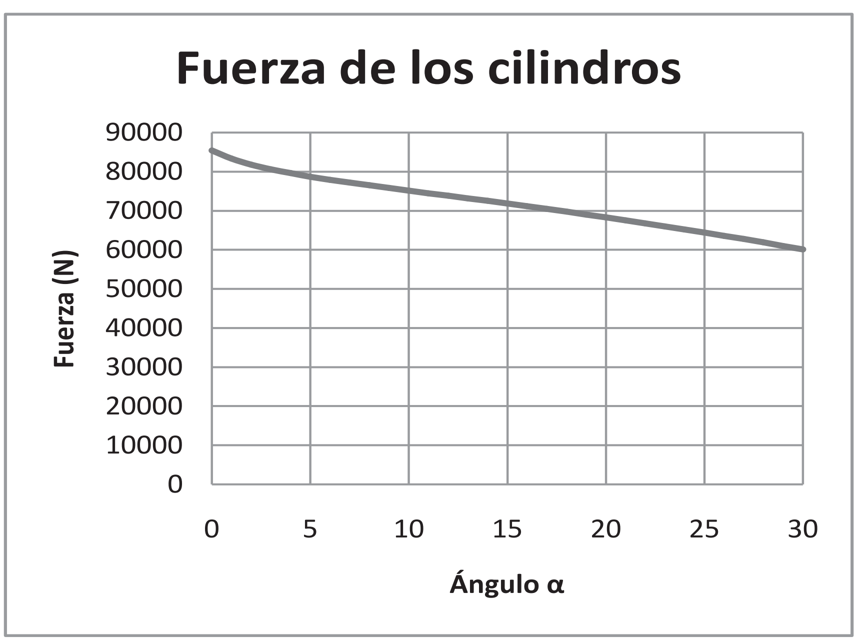
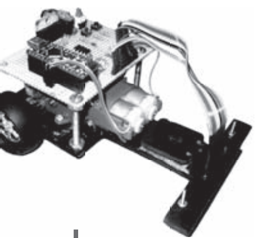


Figura 8: Función existente entre la fuerza de los cilindros y el ángulo α.
Fuente: el autor



Punto de anclaje de los cilindros para lograr su costo mínimo. Como se estableció desde el enunciado, el costo es proporcional al producto de la fuerza máxima de los cilindros y su longitud máxima. El resultado fue: cuando X1=3,6 m, Y1=0,4 m y X2=3,62 m, se obtiene el valor mínimo del producto mencionado (176466).

La hoja electrónica usada, se ha publicado en el siguiente sitio de Internet, de donde puede descargarse: https://sites.google.com/site/professorcortess/

4. Conclusiones

El ejercicio mostrado es un caso típico, que ilustra el procedimiento seguido con estudiantes de Diseño de Máquinas y de Ingeniería Mecánica para modelar matemáticamente situaciones de estudio hipotéticas o reales. Aunque el procedimiento se aplicó para un caso de diseño mecánico, también se ha utilizado en otras áreas de la ingeniería como en casos de cinemática, termodinámica, electricidad y dimensionamiento de espacios, por lo tanto, es transferible a situaciones problemáticas de ingeniería para, establecer las relaciones entre las variables asociadas al fenómeno.

El valor que tiene la obtención del modelo matemático de un fenómeno físico, radica en que con su ayuda se pueden realizar distintas acciones como son: comprender los aspectos conceptuales del fenómeno representado; predecir el comportamiento de las variables involucradas, cuando algunos parámetros asociados al fenómeno cambian de valor; o adquirir criterios objetivos para tomar decisiones de diseño.

Cuando la resolución analítica de un caso modelado resulta muy compleja, puede optarse por una solución numérica con la ayuda de la hoja electrónica y las herramientas que ella ofrece. En particular, para encontrar valores óptimos de variables es útil la función Solver de la hoja Excel.

5. Bibliografía

Bedford, Anthony y Fowler, Wallace (2008). “Mecánica para ingeniería” Estática. México: Pearson.

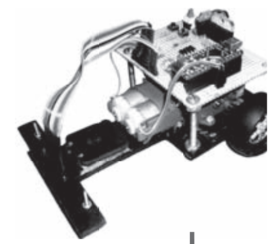
Brown, R. (2002). Mathematical modelling in the international baccalaureate, teacher beliefs and technology usage. Teaching Mathematics and its Applications, 21(2), 67-67. http://search.proquest.com/docview/231646051?accountid=34622.

Caine, D. J., & Robson, A. J. (1993). Spreadsheet modelling: Guidelines for model development. Management Decision, 31(1), 38-38. http://search.proquest.com/docview/212080181?accountid=34622.

Carrejo, D. J. (2004). Mathematical modeling and kinematics: A study of emerging themes and their implications for learning mathematics through an inquiry-based approach. The University of Texas at Austin). ProQuest Dissertations and Theses, 175 p. http://search.proquest.com/docview/305127283?accountid=34622.

Howard, W. R. (2006). The nature of mathematical modeling. Kybernetes, 35(3), 597-597. http://search.proquest.com/docview/213915706?accountid=34622.

Ketut, B. A., & Ishida, K. (2003). Spreadsheet modeling to determine optimum ship main dimensions and power requirements at basic design stage. Marine Technology and SNAME News, 40(1), M61-M61. http://search.proquest.com/docview/211767338?accountid=34622.



Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N., & Sauerbier, G. (2008). Increasing engineering students awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. Teaching Mathematics and its Applications, 27(3), 123-130. doi:10.1093/teamat/hrn007.

Otávio, R. J., & Maria Lúcia L. Wodewotzki. (2006). Mathematical modelling: A path to political reflection in the mathematics class. Teaching Mathematics and its Applications, 25(1), http://search.proquest.com/docview/231671888?accountid=34622.

Robson, A. J. (1994). The spreadsheet: How it has developed into a sophisticated modelling tool. Journal of Enterprise Information Management, 7(1), 17-17. http://search.proquest.com/docview/220040140?accountid=34622.